Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f συνεχής στο [α, β] και
- f (α) $\neq$ f (β)

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των *f(α)* και *f(β)* υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Β. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z είναι $z+\bar{z}=2\cdot \mathrm{Re}(z)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

2. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +\infty$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

3. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f: A \to i$ και $f: B \to i$, αν ορίζεται συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$, τότε έχει πεδίο ορισμού την τομή $A \cap B$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

4. Αν μια συνάρτηση **f** δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

5. $\int_a^\beta f(x)\cdot g'(x)dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)\cdot g(x)dx$, όπου f ' , g' είναι συνεχείς στο [α,β].

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με $f(x)=4x^3+12\lambda x^2+(\lambda-1)x$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$ όπου $\lambda\in\mathbf{R}$, η οποία παρουσιάζει στο σημείο $x_0=-1$ καμπή.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. **i.** Να βρείτε την αρχική της f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο (0,1).

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ 3

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει f (ημx)+f (συνx)= 1, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

i. $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ και f(0) + f(1) = 1.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii. Υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)+x_0=1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Β. Έστω επιπλέον, ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $f(x)\geq\sqrt{2}x-\dfrac{1}{2}$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

i. Να βρείτε την $f'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 4

Α. Να αποδείξετε ότι $e^x - x \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Πότε ισχύει η ισότητα $e^x - x = 1$;

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Β. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$, θεωρούμε το μιγαδικό z, με:

$$z=\int_0^x e^{f(t)}dt + ix\int_0^1 e^{f(x-xt)}dt \quad \textbf{και} \quad \frac{|z|}{\sqrt{2}}=\int_0^x\left[f(t)+e^t\right]dt + f(a)-1$$

όπου $\alpha>0$.

Να αποδείξετε ότι:

α. **i.** $\dfrac{z}{1+i}=\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii. $e^{f(x)}=f(x)+e^x$ για κάθε $x\geq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β. Η f είναι γνησίως αύξουσα .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. Η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την αντίστροφή της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(0,a)$ τέτοιο, ώστε $a\cdot f'(\xi)=1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4